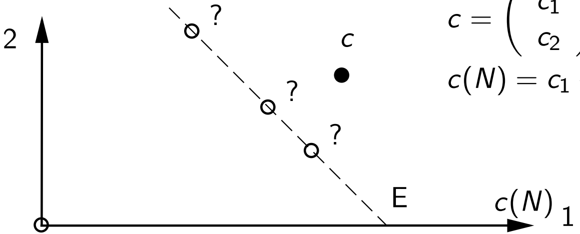
Regla "corre al banco" cuando se consideran múltiples referencias

Sánchez F.J.*, Borrero D.V.*, Hinojosa M.A.*, Mármol A.M.**

* Universidad Pablo de Olavide de Sevilla
** Universidad de Sevilla

X Reunión GEDM (Madrid (CEU San Pablo), 10 de junio de 2016)

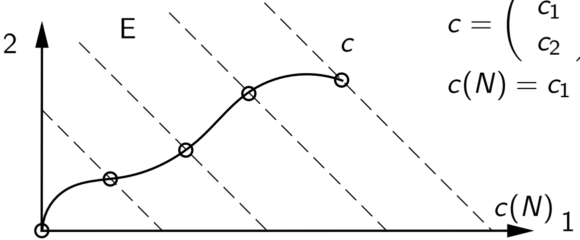
El problema de bancarrota
¿Como repartir cuando no hay bastante?



$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

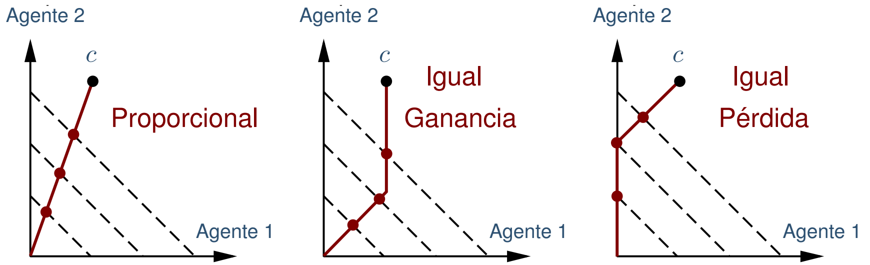
$$c(N) = c_1 + c_2$$

¿Como repartir cuando no hay bastante?
Una regla de reparto:



$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$c(N) = c_1 + c_2$$



sm

Estas tres son las únicas reglas que verifican:

- Igual tratamiento de iguales
- Homogeneidad
- Consistencia (CONS)
- Composición hacia arriba
- Composición hacia abajo

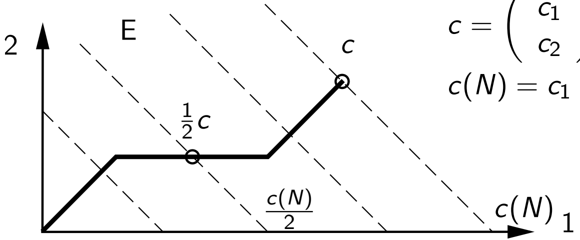
También verifican

- Preservación del orden
- Continuidad
- Anonimato

La regla proporcional es la única que verifica:

- NAMS

Regla del Talmud



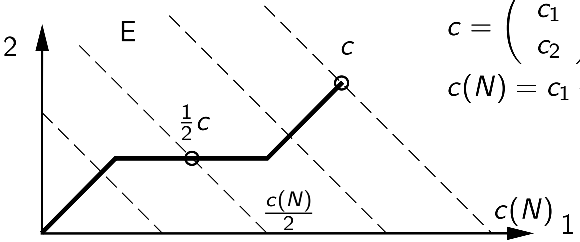
$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$c(N) = c_1 + c_2$$

- CONS
- Igual tratamiento de iguales
- Independencia de truncamiento de las reclamaciones
- Composición desde mínimos derechos

Regla “Corre al banco”

$$RC_i(E,c) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \min \left\{ c_i, \max \left\{ 0, E - \sum_{j \in P(\pi,i)} c_j \right\} \right\}$$



$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$c(N) = c_1 + c_2$$

Regla "Corre al banco" (bancarrota)

$$RC_i(\mathbf{c}, E) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_N} x_i^{\pi},$$

$$x_i^{\pi} = \begin{cases} 0 & si \quad E < c(P(\pi, i)). \\ E - c(P(\pi, i)) & si \quad c(P(\pi, i)) \leq E < c(P(\pi, i) \cup \{i\}) \\ c_i & \text{si} \quad E \geq c(P(\pi, i) \cup \{i\}) \end{cases}$$

Teoría de Juegos
- Juegos cooperativos
  - Juegos de negociación
  - Juegos de utilidad transferible (TU)
  - Juegos de utilidad no transferible (NTU)
- Juegos no cooperativos

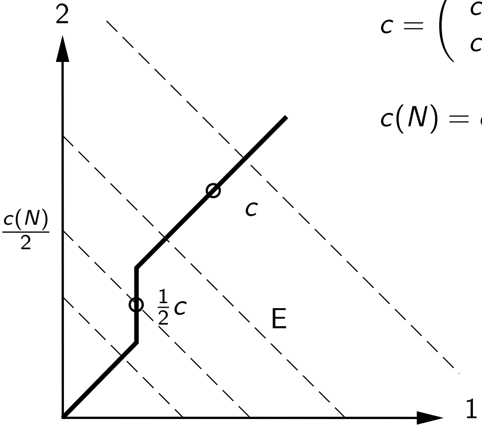
Nucleolo (Schmeidler(1969))	(justicia social)	$T(E,c) = \nu(N,v)$
Valor de Shapley (Shapley(1953))	(ecuanimidad)	$RC(T,c) = \Phi(N,v)$

Juego de bancarrota de O'Neill(1982) (Thomson(2003))

$$v(S) := \text{máx}\left\{0, E - \sum_{i \notin S} c_i\right\}.$$

¿Como funciona la regla si no se impone $c(N) > E$?

Reparto de los beneficios de un proyecto (Moulin, 1987)



$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$c(N) = c_1 + c_2$$

Regla "Corre al banco"

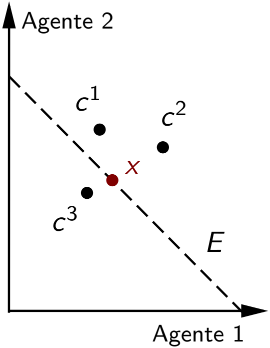
$$\overline{RC}_i(\mathbf{c}, E) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_N} y_i^{\pi},$$

$$y_i^{\pi} = \begin{cases} \max\{E - c(P(\pi, i)), 0\} & si \quad \pi(i) = n \\ x_i^{\pi} & si \quad \pi(i) \neq n. \end{cases}$$

y_i^{π} puede escribirse también:

$$y_i^{\pi} = \begin{cases} 0 & si \quad E < c(P(\pi, i)), \\ E - c(P(\pi, i)) & si \quad c(P(\pi, i) \leq E < c(P(\pi, i) \cup \{i\}) \\ E - c(P(\pi, i)) & \text{si} \quad E \geq c(P(\pi, i) \cup \{i\}) \text{ y } \pi(i) = n \\ c_i & \text{si} \quad E \geq c(P(\pi, i) \cup \{i\}) \text{ y } \pi(i) \neq n \end{cases}$$

$$\boxed{\overline{RC}(\mathbf{c}, E) = \phi(N, v)}$$



Problema de reparto con referencias múltiples

(N, M, C, E)

$C \in \mathbb{R}_+^{M\times N}$

Referencias múltiples

- Referencias de diferentes expertos.
- División bajo incertidumbre.

Regla "corre al banco" con referencias múltiples:

$$MRC_i(C,E) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi_N} \overline{y}_i^{\pi},$$

$$\overline{y}_i^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad E < \overline{\mathbf{c}}(P(\pi,i)) \\ E - \overline{\mathbf{c}}(P(\pi,i)) & \text{si} \quad \overline{\mathbf{c}}(P(\pi,i)) \leq E < \overline{\mathbf{c}}(P(\pi,i)\cup\{i\}) \\ E - \overline{c}(P(\pi,i)) & \text{si} \quad E \geq \overline{\mathbf{c}}(P(\pi,i)\cup\{i\}) \text{ y } \pi(i) = n \\ \overline{\mathbf{c}}(P(\pi,i)\cup\{i\}) - \overline{\mathbf{c}}(P(\pi,i)) & \text{si} \quad E \geq \overline{\mathbf{c}}(P(\pi,i)\cup\{i\}) \ y \ \pi(i) \neq n \end{cases}$$

donde para cada $T \subseteq N$ y cada $k \in M$, $c^k(T) = \sum_{j\in T} c_j^k$ y

$$\overline{\mathbf{c}}(T) = \max_{k\in M} c^k(T)$$

¿Se corresponde esta regla con alguna solución de la teoría de juegos?

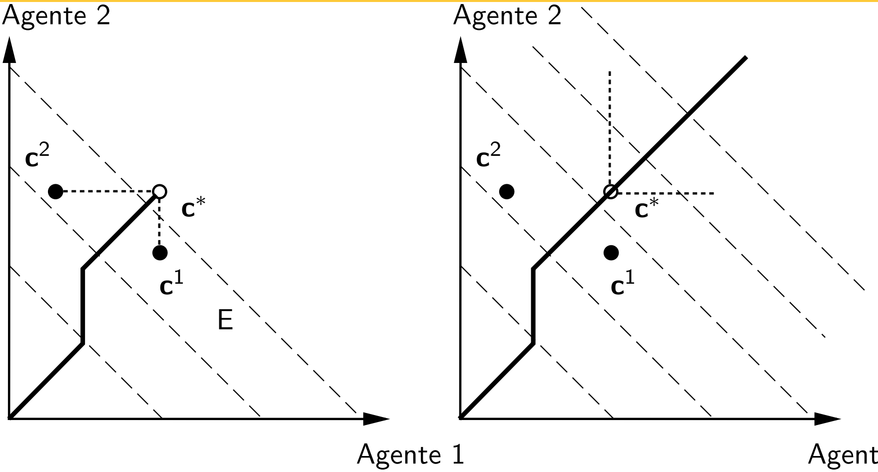
k juegos de mínimos derechos diferentes:
Para cada $k \in M$, $v^k(\emptyset) = 0$ y para cada $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$,

$$v^k(S) = \Big(E - c^k(N \backslash S)\Big)_+ = \max\{E - c^k(N \backslash S), 0\}.$$

$$\boxed{v^{\text{mín}}(S) = \text{mín}_{k \in M} v^k(S), \forall S \subset N}$$

Teorema

$$\boxed{MRC(C, E) = \phi(N, v^{\text{mín}})}$$



Teorema

Para cada problema de reparto con referencias múltiples, $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ con $|N| = 2$, se tiene que $MRC(C, E) = \overline{RC}(\mathbf{c}^*, E)$.

Teorema

Para cada problema de reparto con referencias múltiples, $(C,E) \in \mathcal{C}_N^M$ con $|N| = 2$, se tiene que $MRC(C,E) = \overline{RC}(\mathbf{c}^*, E)$.

¿$|N| > 2$?

$$E^* = \min_{T \in \mathcal{T}} \overline{c}(N \setminus T),$$

cuando $\mathcal{T} = \{T \subset N| \ T \neq \emptyset \ c^*(N \setminus T) > \overline{c}(N \setminus T) \neq \emptyset$ y $E^* = 0$ en otro caso.

Teorema

En un problema de reparto con referencias múltiples, $(C,E) \in \mathcal{C}_N^M$ si $E \leq E^*$, entonces $MRC(C,E) = \overline{RC}(\mathbf{c}^*, E)$.

$$\overline{E} = \max_{T \subseteq N,\ T \neq \emptyset} \overline{c}(N \setminus T), \qquad \mathcal{L} = \{T \subseteq N \mid T \neq \emptyset, 0 \leq \overline{c}(N \setminus T) \leq \overline{E}\}.$$

$$E_0 = 0 < E_1 < E_2 \ldots < E_r = \overline{E}$$

Teorema

(i) Para cada $p = 1, \ldots, r$ y cada E, $E_{p-1} < E \leq E_p$ se cumple que:

$$MRC(C, E) - MRC(C, E_{p-1}) = \frac{E - E_{p-1}}{E_p - E_{p-1}}(MRC(C, E_p) - MRC(C, E_{p-1})).$$

(ii) Para cada $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$ y cada $i \in N$ se cumple que:

$$MRC_i(C, \overline{E} + A) = MRC_i(C, \overline{E}) + \frac{A}{|N|}.$$

Un ejemplo

$N = \{1, 2, 3\}$

$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 15 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{c}^* = (15, 9, 10)$

$S \neq \emptyset$	$N \backslash S$	$c^1(N \setminus S)$	$c^2(N \setminus S)$	$\overline{c}(N \setminus S)$	$c^*(N \backslash S)$
{1,2,3}	{∅}	0	0	0	0
{1,3}	{2}	7	9	9	9
{1,2}	{3}	10	2	10	10
{2,3}	{1}	3	15	15	15
{1}	{2,3}	17	11	$17 = E^*$	19
{2}	{1,3}	13	17	$17 = E^*$	25
{3}	{1,2}	10	24	$24 = \overline{E}$	24

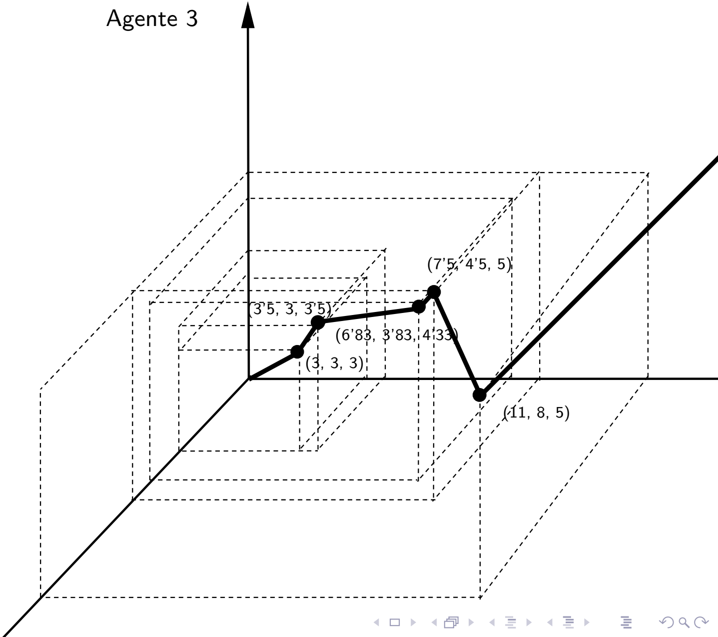
Un ejemplo

$N = \{1, 2, 3\}$

$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 15 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{c}^* = (15, 9, 10)$

E	$MRC(C, E)$	Reparto de una unidad
$E_1 = 9$	$(3, 3, 3)$	$(1/3, 1/3, 1/3)$
$E_2 = 10$	$(3'5, 3, 3'5)$	$(1/2, 0, 1/2)$
$E_3 = 15$	$(6'83, 3'83, 4'33)$	$(2/3, 1/6, 1/6)$
$E_4 = 17$	$(7'5, 4'5, 5)$	$(1/3, 1/3, 1/3)$
$E_5 = 24$	$(11, 8, 5)$	$(1/2, 1/2, 0)$
$E > 24$		$(1/3, 1/3, 1/3)$


Agente 3
(7'5, 4'5, 5)
(3'5, 3, 3'5)
(6'83, 3'83, 4'33)
(3, 3, 3)
(11, 8, 5)

Regla "corre al banco"
cuando se consideran múltiples referencias

Sánchez F.J.*, Borrero D.V.*, Hinojosa M.A.*, Mármol A.M.**

* Universidad Pablo de Olavide de Sevilla
** Universidad de Sevilla

X Reunión GEDM (Madrid (CEU San Pablo), 10 de junio de 2016)